1. Valor esperado de una variable aleatoria continua

<u>Definición</u>: El valor esperado de una variable aleatoria continua Y es

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y) dy$$

siempre que exista la integral.

<u>Teorema</u>: Si $g(Y)$ es una función de Y, entonces el valor esperado de $g(Y)$ esta dado por la expresión

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(y) dy$$

siempre y cuando exista la integral.

<u>Teorema</u>: Si c es una constante y $g_1(y)$, $g_2(y)$, ..., $g_k(y)$ son funciones de una variable aleatoria continua Y, entonces:

1. $E[c] = c$.
2. $E[cg(Y)] = cE[g(Y)]$.
3. $E[g_1(Y) + g_2(Y) + ... + g_k(Y)] = E[g_1(y)] + E[g_2(y)] + ... + E[g_k(y)]$.

<u>Ejemplo</u>. Si Y tiene función de densidad

$$f(y) = \begin{cases} \frac{3}{2}y^2 + y & , \quad 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & , \quad \text{en otro punto} \end{cases}$$

Calcule la media y la varianza.

<u>Solución</u>.

a)

$$E[Y] = \int_0^1 y \left(\frac{3}{2}y^2 + y\right) dy = \left[\frac{3}{8}y^4 + \frac{1}{3}y^3\right]_0^1 = \frac{17}{24}.$$

b)

$$E[Y^2] = \int_0^1 y^2 \left(\frac{3}{2}y^2 + y\right) dy = \frac{11}{20}.$$

Luego usando uno de los teoremas anteriores tenemos

$$V(Y) = E[Y^2] - \mu^2 = \frac{11}{20} - \left(\frac{17}{24}\right)^2 = \frac{139}{2880}.$$

<u>Ejemplo</u>. Si Y es variable aleatoria continua con media μ y varianza σ^2, además a y b son constantes, demuestre que

a $E[aY + b] = a\mu + b$.
b $V(aY + b) = a^2\sigma^2$.

<u>Solución</u>.
a) Si $f(y)$ es la densidad de Y, entonces

$$\begin{aligned} E[aY+b] &= \int_{-\infty}^{\infty}(ay+b)f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}\left[ayf(y)+bf(y)\right]dy \\ &= a\int_{-\infty}^{\infty}yf(y)dy + b\int_{-\infty}^{\infty}f(y)dy = a\mu + b. \end{aligned}$$

Recordando que $\int_{-\infty}^{\infty} yf(y) = E[Y] = \mu$ y $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) = 1$.

b) Sabemos que $V(Y) = E[Y^2] - \mu^2$, por lo tanto $V(aY+b) = E[(aY+b)^2] - E[aY+b]^2$.

$$\begin{aligned} E[(aY+b)^2] &= \int_{-\infty}^{\infty}(ay+b)^2 f(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty}[a^2y^2+2aby+b^2]f(y)dy \\ &= a^2\int_{-\infty}^{\infty}y^2f(y)dy + 2ab\int_{-\infty}^{\infty}yf(y)dy + b^2\int_{-\infty}^{\infty}f(y)dy \end{aligned}$$

Recordando $\int_{-\infty}^{\infty} yf(y) = E[Y] = \mu$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(y) = 1.$ y $\int_{-\infty}^{\infty} y^2f(y)dy = E[Y^2]$, tenemos

$$= a^2E[Y^2] + 2ab\mu + b^2.$$

Luego

$$\begin{aligned} V(aY+b) &= \left[a^2E[Y^2]+2ab\mu+b^2\right] - (a\mu+b)^2 = a^2E[Y^2]+2ab\mu+b^2-a^2\mu^2-2ab\mu-b^2 \\ &= a^2\left(E[Y^2]-\mu^2\right) = a^2\sigma^2. \end{aligned}$$